Thm (Thm 11 & 12 Lay p. 82-83)

(Important)

Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une T.L.

et A_T sa matrice, alors

1) T est injective $\Leftrightarrow$ $A_T \cdot \vec{x} = \vec{0}$ possède seulement la solution nulle

1') T est injective $\Leftrightarrow$ les colonnes de A_T sont lin. indépendantes (pas de variable libre) càd 1 pivot par colonne

2) T est surjective $\Leftrightarrow$ $A_T \cdot \vec{x} = \vec{b}$ possède une solution $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^m$

2') T est surjective $\Leftrightarrow$ les colonnes de A_T engendrent $\mathbb{R}^m$ càd il existe 1 pivot par ligne

3) T est bijective $\Leftrightarrow$ $A_T\vec{x} = \vec{b}$ possède une sol. unique $\forall \vec{b}$

càd il existe un pivot par ligne et par colonne de A_T

Cours 4.1
1.10.2024

càd les colonnes de A_T sont lin. indépendantes et engendrent $\mathbb{R}^m$

(plus tard on dira : les colonnes de A_T forment une base de $\mathbb{R}^m$)

exemples :

1) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ linéaire (vérifier le)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_T = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\quad T(\vec{e}_1) \quad T(\vec{e}_2) \quad T(\vec{e}_3)$

3 pivots
3 colonnes

$\Rightarrow T$ est injective

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

T n'est pas surjective $\begin{pmatrix} 3 \text{ pivots} \\ 4 \text{ lignes} \end{pmatrix}$

(évident car $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Im}(T)$)

2) $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ T est linéaire

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_5 \\ x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$A_T = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}}_{T(\vec{e_1})} & \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}}_{T(\vec{e_2})} & \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}}_{T(\vec{e_3})} & \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}}_{T(\vec{e_4})} & \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}}_{T(\vec{e_5})} \end{pmatrix}_{3 \times 5}$$

$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

3 pivots
3 lignes

$\Downarrow$

T est surjective

3 pivots vs 5 colonnes

T n'est pas injective

3) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+ky \\ y \end{pmatrix}$$

$k \in \mathbb{R}$
param.

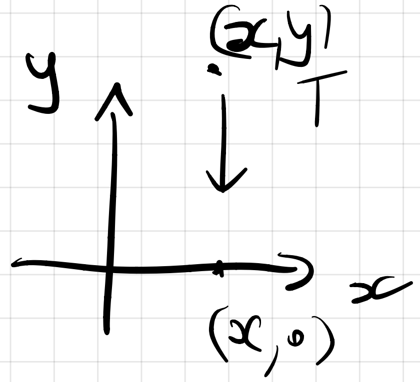
$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\quad\;\; T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \;\; T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

2 pivots
2 lignes
2 colonnes

T est bijective

4) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$



la proj. orth. sur Ox

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\quad\;\; T(\vec{e}_1) \; T(\vec{e}_2)$$

1 pivot : T ni injective
ni surjective

$$\left(T \circ T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad\quad T \circ T = T \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Fin Chap. 1.

Résumé Chap 1 :

Syst. linéaires

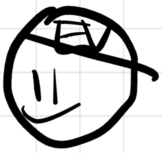
- opér. élém.
- matrice associée
- sol. du syst. (in)homogène
- résultats d'existence & unicité des solutions

Equations vectorielles / matricielles

- $A\vec{x} = \vec{b}$ écriture matricielle

  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ $\quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ $\quad \vec{b} \in \mathbb{R}^m$

- espaces $\mathbb{R}^n$



- comb. lin. de vecteurs $\quad \lambda\vec{x} + \mu\vec{y}$
- indépendance lin.

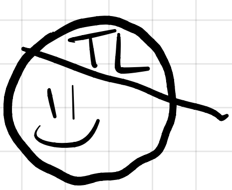
Transformations linéaires (entre $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$)

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vérifiant

- $T(\vec{x}+\vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$
- $T(\lambda\vec{x}) = \lambda T(\vec{x})$

$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$



Dictionnaire entre

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Transformations}\\ \text{linéaires}\end{array}\right\} \longleftrightarrow \{\text{matrices}\}$$

plus précisément:

<u>Not</u>: $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et notons

$$TL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \left\{ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \;\middle|\; T \text{ est linéaire} \right\}$$

alors le dico "vu" donne une bijection

$$M_{m\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow TL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

$$A \longmapsto T_A \quad \left(\begin{array}{c}\text{définie}\\ \text{par}\end{array}\right) \quad \begin{array}{l} T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ \quad \vec{x} \mapsto A\vec{x} \end{array}$$

$$A_T \longleftarrow\!\!| \; T$$

la matrice canoniquement associée à T

définie par $\quad A_T = \left(T(\vec{e}_1) \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, T(\vec{e}_n) \right)$

$$\left(\begin{array}{l} \underline{\text{Dico parfait :}} \\ \qquad A \mapsto T_A \longmapsto A_{(T_A)} = A \\ \\ T = T_{(A_T)} \longleftarrow\!\!| \; A_T \longleftarrow\!\!| \; T \end{array} \right)$$

Remarque : $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$$A_T \vec{x} \underset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} T(\vec{e}_1) & \cdots & T(\vec{e}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{déf}}{=} x_1 T(\vec{e}_1) + x_2 T(\vec{e}_2) + \cdots + x_n T(\vec{e}_n)$$

$$\underset{\text{T est linéaire}}{=} T(\underbrace{x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \cdots + x_n \vec{e}_n}_{\vec{x}}) = T(\vec{x})$$

cqfd
Thm 10

Fin chap. 1

Chap. 2 : Calcul matriciel

Motivation :

① $\begin{cases} x+2y+3z = a \\ 4x+5y+6z = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

② $\begin{cases} a+2b = t_1 \\ 3a+4b = t_2 \\ 5a+6b = t_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$

on peut imbriquer ① & ②

remplacer a par $x+2y+3z$ etc.

$$\begin{cases} x+2y+3z+2(4x+5y+6z) = t_1 \\ 3(x+2y+3z)+4(4x+5y+6z) = t_2 \\ 5(x+2y+3z)+6(4x+5y+6z) = t_3 \end{cases}$$

on développe et on regroupe les termes en x, y, z

$\Rightarrow$ nouveau système 3 inconnues 3 équations

Q : Quelle est donc la matrice associée à ce nouveau système ?

§2.1 Opérations matricielles

$m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Voc / Notations :

pour

$A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

on dénote par $A_{i,j}$ ou $a_{i,j} \in \mathbb{R}$

le coeff. se trouvant en $i^{\text{ème}}$ ligne

$j^{\text{ème}}$ colonne

$1 \leq i \leq m$

$1 \leq j \leq n$

Not : $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$

notons par $\vec{a}_k$ la $k^{\text{ème}}$ colonne de A

$\vec{a}_k \in \mathbb{R}^m$ $\qquad$ $\vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ a_{2,k} \\ \vdots \\ a_{m,k} \end{pmatrix}$

$A = (\vec{a}_1 \mid \cdots \mid \vec{a}_n)$

<u>Not</u>/Déf : les coeff a_{ii}

avec $1 \leq i \leq \min(m,n)$

sont les coeff. diagonaux de A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrices particulières : $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$

A est dite <u>carrée</u> si $m = n$

A " " <u>diagonale</u> si elle est carrée et si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$

<u>ex</u> :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} = \text{matrice identité } n \times n$$

$$O_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n} = \text{matrice nulle } n \times n$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{10} & 0 \\ 0 & 0 & -\pi \end{pmatrix}$$

matrices ligne : $A \in M_{1 \times n}(\mathbb{R})$

$$A = (a_{11} \; a_{12} \; \cdots \; a_{1n})$$

matrices col. : $A \in M_{m \times 1}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Egalité entre matrices :

Pour $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

$B \in M_{m' \times n'}(\mathbb{R})$ on a

$$A = B \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} m = m' \\ n = n' \\ a_{i,j} = b_{i,j} \end{cases} \quad \begin{matrix} \forall 1 \leq i \leq m \\ \forall 1 \leq j \leq n \end{matrix}$$

§2.1.1 Somme de matrices et mult. par un scalaire

Déf : $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. on pose

même taille

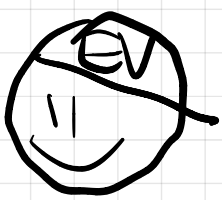
- $(A+B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$ addition matricielle

- $(\lambda A)_{i,j} = \lambda A_{i,j}$ mult. d'une matrice par un scalaire

Règles de calcul

- $(A+B)+C = A+(B+C)$
- $A+B = B+A$
- $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
- $A + 0 = A$

0 : matrice nulle de même taille que A



en particulier, toute matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ possède un <u>opposé</u>, la matrice $-A$

définie par $(-A)_{i,j} = -A_{i,j}$.

§ 2.1.2 Multiplication matricielle

<u>Déf</u> : Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

et si $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$

on dira que A et B sont <u>composables</u>

càd le nombre de colonnes de A

égale le nombre de lignes de B

<u>Rem</u> : Si A et B sont composables

alors $T_B : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$

et $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

donc $T_A \circ T_B : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

composition de fonct.

càd si $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$ on a

$$\left(T_A \circ T_B\right)(\vec{x}) = T_A\left(T_B(\vec{x})\right) = T_A(B\vec{x})$$
$$= A(B\vec{x})$$

<u>Rem</u> : $T_A \circ T_B$ est linéaire (exercice)

il lui correspond donc une matrice notée AB tq $T_{AB} = T_A \circ T_B$

càd $(AB)\vec{x} = A(B\vec{x})$

<u>Def explicite de AB</u> :

$A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$ composables

Soient $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_p$ les colonnes de B

$b_i \in \mathbb{R}^n$ (de sorte que $B = (\vec{b}_1 | \cdots | \vec{b}_p)$)

<u>Rem</u> : $A\vec{b}_i \in \mathbb{R}^m$ (cela fait sens)

On pose

$$AB \underset{\text{déf}}{=} \left(A\vec{b_1} \;\middle|\; A\vec{b_2} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; A\vec{b_p} \right)$$

m lignes

p colonnes

on a bien $AB \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$.

<u>ex</u> : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2}$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \vec{b_1} \quad \vec{b_2} \end{array}$$

$A\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$A\vec{b_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$

Remarque : si $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$

alors

$$(AB)\vec{x} \underset{\text{déf. de } AB}{=} \left(A\vec{b}_1 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, A\vec{b}_p \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

$$= x_1 (A\vec{b}_1) + x_2 (A\vec{b}_2) + \cdots + x_p (A\vec{b}_p)$$

déf. du produit matrice × vecteur $(AB)\vec{x}$

$$\underset{TL}{=} A(x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + \cdots + x_p\vec{b}_p)$$

$$= A(B\vec{x})$$

déf du prod matriciel $B\vec{x}$

Ainsi, la multiplication matricielle correspond à la composition de fonctions (et donc à l'imbrication de système)

$$\mathbb{R}^p \xrightarrow{T_B} \mathbb{R}^n \xrightarrow{T_A} \mathbb{R}^m$$

$$\vec{x} \mapsto B\vec{x}$$

$$\vec{y} \mapsto A\vec{y}$$

$$\vec{x} \longmapsto (AB)\vec{x} = A(B\vec{x})$$

Règle ligne-colonne pour AB (important)

$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$

alors $\forall\ 1 \leq i \leq m$ et $\forall\ 1 \leq j \leq p$

$$\boxed{(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} \cdot B_{k,j}}$$

$$= \underbrace{A_{i,1} \cdot B_{1,j}}_{k=1} + \underbrace{A_{i,2} \cdot B_{2,j}}_{k=2} + \dots + \underbrace{A_{i,n} \cdot B_{n,j}}_{k=n}$$

exemples :

1) $$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{array}{cc} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2}} \end{array}}_{B}$$

$$\overset{\text{déf}}{\underset{\text{directe}}{=}} \left(A\vec{b}_1 \,\middle|\, A\vec{b}_2 \right) = \begin{pmatrix} \underbrace{-2}_{A\vec{b}_1} & \underbrace{1}_{A\vec{b}_2} \\ 10 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$$\begin{array}{c} \ell_1(A) \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} c_1(B) \\ \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ligne-vecteur}}}{=}$$

$$= \begin{pmatrix} 4\cdot 0 + 1\cdot 0 + (-1)\cdot 2 & \\ & \end{pmatrix}$$

2) calculer le coeff. $(3,3)$ de la matrice AB où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 & 2^5 \\ 3 & 3^2 & 3^3 & 3^4 & 3^5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 4^2 & 4^3 & 4^4 & 4^5 \end{pmatrix}_{4\times 5}$$

$$B = \begin{pmatrix} \pi & 10^{10} & 0 & 1 \\ \frac{1}{\pi} & 10^{100} & 1 & -e \\ \pi & 10^{1000} & -1 & e^e \\ \pi & & 1 & e^{e^e} \\ \pi & 10^{10000} & 0 & e^{e^{e^e}} \end{pmatrix}_{5\times 4}$$

$$(AB)_{3,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ligne-col.

produit scalaire

$$= 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 3(-1) + 0\cdot 1 + 1\cdot 0$$

$$= 2-3 = -1.$$

<u>Morale</u> : règle ligne-colonne plus pratique pour un coeff.